TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

**VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC**

----- 🙡 🕮 🙣 -----



**BÁO CÁO MÔN HỌC GIẢI TÍCH SỐ**

***Đề tài:* Phương pháp bình phương tối thiểu**

Giảng viên hướng dẫn: **TS Hà Thị Ngọc Yến**

Sinh viên thực hiện: Nguyễn Tài Quang Dinh -20200092

Lớp MI-TN K65

**Hà Nội, năm 2021**

**MỤC LỤC**

**1.Giới thiệu ………………………….. 2**

**2. Kiến thức chung**

**2.1 Sai số trung bình phương…… 4**

**2.2 Xấp xỉ hàm theo nghĩa trung bình phương………….. 5**

**3. Phương pháp xấp xỉ hàm trong thực nghiệm bằng đa thức suy rộng**

**3.1 Định nghĩa…………………………………………………………….. 7**

**3.2 Nội dung………………………………………….……………………. 7**

**3.3 Sai số của phương pháp……………………………………….. 9**

**3.4 Mở rộng trên hệ trực giao……………………………………. 10**

**4. Sơ đồ khối và thuật toán………………………………**

**4.1 Sơ đồ khối……………………………………………………………. 12**

**4.2 Thuật toán……………………………………………………………. 13**

**5. Ví dụ…………………………………………………………… 17**

**6. Đánh giá và ứng dụng**

**6.1 Đánh giá ưu nhược điểm……………………………………. 21**

**6.2 Ứng dụng…………………………………………………………… 21**

**7. Lời kết………………………………………………………. 23**

**8. Tài liệu tham khảo…………………………………….. 24**

**9. Phụ lục các bản input ……. 25**

1. **Giới Thiệu:**

- Qua các chủ đề trước ta đã xấp sỉ hàm f(x) bởi đa thức nội suy p(x), xuất phát từ bảng số yi=f(xi) với i = đã biết. Các giá trị này xem là giá trị đúng của hàm f(x) tại xi.

- Phương pháp nội suy nói trên khi sử dụng trong thực tiễn thì ta có những điều cần cân nhắc là:

1. Trong các đa thức nội suy =. Tuy nhiên sự đòi hỏi này không có ý nghĩa nhiều trong thực tế. Bởi vì các số yi ­ ­ có giá trị của hàm y=f(x) tại các điểm x=xi­ , trong thực tế chúng ta cho dưới dạng bảng và thường thu được từ những kết quả đo đạc hoặc tính toán trong thực hành. Những số yi này nói chung chỉ xấp xỉ với các giá trị đúng f(xi) của hàm số y=f(x) tại x=xi­ . Sai số mắc phải nói chung khác không. Nếu buộc φ(xi)=yi thì thực chất đã đem vào bài toán sai số εi của các số liệu ban đầu nói trên
2. Để cho đa thức nội suy φ(x) biểu diễn xấp sỉ hàm f(x) một cách sát thức đương nhiên cần tăng mốc nội suy xi­ (nghĩa là làm giảm sai số của công thức nội suy). Nhưng điều này lại kéo theo cấp của đa thức nội suy tăng lên do đó những đa thức nội suy thu được khá cồng kềnh gây khó khăn cho việc thiết lập cũng như dựa vào đó để tính giá trị gần đúng hoặc khảo sát hàm số f(x).

- Chính vì những lý do trên nên trong báo cáo này em sẽ trình bày phương pháp tìm hàm xấp xỉ có thể sẽ sát thực hơn thông qua hai bài toán:

**Bài toán 1**( Bài toán tìm hàm xấp xỉ):

**-** Giả sử đã biết giá trị yi ( với i = ) của hàm y=f(x) tại các điểm tương ứng với x=xi. Tìm hàm ϕm(x) xấp xỉ với hàm f(x) trong đó

ϕm(x)=.

Với là những hàm đã biết và I là những hệ số hằng số.

**-** Trong khi giải quyết bài toán này cần chọn hàm ϕm(x) sao cho quá trình tính toán đơn giản đồng thời nhưng sai số có tính chất ngẫu nhiên cần phải chính lý trong quá trình tính toán. Trong bài toán tìm hàm xấp xỉ trên việc chọn dạng của hàm xấp xỉ trên việc chọn dạng của hàm xấp xỉ là tùy thuộc ý nghĩa thực tiễn của hàm f(x).

**Bài toán 2**(tìm các tham số của một hàm có dạng đã biết)

Giả sử đã biết dạng tổng quát của hàm

Y= với là những hằng số. (1.2)

Giả sử qua thực nghiệm ta thu được n giá trị của hàm y=yi ( i=) ứng với các giá trị x=xi của đối. Vấn đề là từ những số liệu thực nghiệm thu được cần xác định các giá trị tham số để tìm dưới dạng cụ thể của biểu thức (1.2) y=f(x) về sự phụ thuộc giữa hàm y và x.

**2. Kiến thức chung:**

**2.1. Sai số trung bình phương**

**2.1.1. Khái niệm về định nghĩa của sai số trung bình phương:**

- Những hàm trong thực nghiệm thu được thường mắc phải những sai số có tính chất ngẫu nhiên. Những sai số này xuất hiện do sự tác động của những yếu tổ ngẫu nhiên vào kết quả thực nghiệm để thu được các giá trị của hàm.

- Chính vì lý do trên, để đánh giá sự sai khác giữa hai hàm trong thực nghiệm ta cần đưa ra khái niệm về sai số( hoặc độ lệch) sao cho một mặt nó chấp nhận được trong thực tế, một mặt lại san bằng những sai số ngẫu nhiên ( nghĩa là gạt bỏ được những yếu tổ ngẫu nhiên tác động vào kết quả của thực nghiệm). Cụ thể nếu hai hàm thực chất khá gần nhau thì sai số chúng ta đưa ra phải khá bé trên miền đang xét.

-Khái niệm về sai số nói trên có nghĩa là không chú ý tới những kết quả có tính chất cá biệt mà xét trên một miền nên được gọi là sai số trung bình phương.

**Định nghĩa 1:**  Xét 2 hàm số f(x) và φ(x). Ta gọi sai số(hay độ lệch) trung bình phương của hai hàm số f(x) và (x) trên tập hợp điểm xi (i=) là biểu thức:

σn = (2-1)

* + 1. **Ý nghĩa của sai số trung bình phương**

Để tìm hiểu ý nghĩa của sai số trung bình phương ta giả thiết f(x) và φ(x) là những hàm liên tục trên đoạn [a,b] và X = xi (i=) là tập hợp các điểm cách đều trên [a;b]

A=x1 <x2<…<xn=b

Theo định nghĩa tích phân xác định ta có (2-2)

Trong đó . (2-3)

Giả sử |có trên n [a,b] một số hữu hạn cực trị và là một số dương nào đó cho trước. Khi đó trên [a,b] sẽ có k đoạn riêng biệt [ai;bi] (i=) sao cho |(với x ∈ [ai;bi] , (i=))

Đặt ω là tổng độ dài các đoạn k nói trên.

Với n đủ lớn và σn­ đủ bé, từ (2-2) ta suy ra σ<ε (ε bé tùy ý). Từ (2-3) suy ra

ε2(b-)>≥

Do đó .

Nghĩa là tổng độ dài ω của các đoạn [ai;bi]sẽ bé tùy ý

Tóm lại: Với σn  bé tùy ý ( n khá lớn) thì trên đoạn [;b] ( trừ tại những điểm của những đoạn [ai;bi]mà có tổng độ dài ω bé tùy ý), ta có

|f(x)-φ(x)| <

Trong đó là một số dương tùy ý cho trước

Từ nhận xét trên ta rút ra những ý nghĩa thực tiễn của sai số trung bình phương như sau:

🡪 Nếu sai số trung bình phương σn  của 2 hàm trên tập hợp n điểm [a;b] (n đủ lớn ) mà khá bé thì với tuyệt đại đa số giá trị của x trên [a,b] cho sai số tuyệt đối giữa khá bé. Như vậy thì φ(x) càng gần với f(x), khi đó ta nói hàm trên [;b] [x0;xn] theo nghĩa trung bình phương.

**2.1. Xấp xỉ hàm theo nghĩa trung bình phương**

Từ ý nghĩa của sai số trung bình phương nói trên

Ta nhận thấy nếu các giá trị yi (i=) của hàm tại các điểm xi và nếu sai số trung bình phương

σn = khá bé thì hàm sẽ xấp xỉ khá tốt với hàm

Cách xấp xỉ một hàm số lấy sai số trung bình phương làm tiêu chuẩn đánh giá như trên là xấp xỉ theo nghĩa trung bình phương.

Rõ ràng: Nếu hàm thu được bằng thực nghiệm (nghĩa là yi ≈ ) thì cách xấp xỉ nói trên đã san bằng những sai lệch tại từng điểm ( nảy sinh do những sai số ngẫu nhiên của thực nghiệm). Đó lòa lý do vì sao phương pháp xấp xỉ theo nghĩa trung bình phương được sử dụng rộng rãi trong thực tiễn.

Ta xét trường hợp là phụ thuộc vào các tham số

= (2-4)

Trong số những hàm có dạng (2-4) ta sẽ gọi hàm

= (2-5)

Là xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa trung bình phương với hàm nếu sai số trung bình phương với f(x) là bé nhất. Cụ thể là

Trong đó:

= (2-6)

Từ đó việc tìm hàm xấp xỉ tốt nhất ( trong số những hàm dạng (2-4) với hàm f(x) sẽ đưa về tìm cực tiểu của tổng bình phương trong đó

Bởi vậy phương pháp tìm xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa trung bình còn gọi là phương pháp bình phương tối thiểu để xấp xỉ hàm trong thực nghiệm

**3. Phương pháp xấp xỉ hàm trong thực nghiệm bằng đa thức suy rộng.**

**3.1. Định nghĩa:**

Giả sử ta có hệ hàm φ0(x),φ1(x),…, ,… Ta sẽ gọi hàm φm(x) là đa thức suy rộng cấp m nếu m(x) có dạng

m(x)= (3-1)

Trong đó là các hệ số hằng số. Hệ hàm φm(x) đã cho gọi là hệ cơ bản.

**3.2. Nội dung:**

Theo phần trên về tìm hàm xấp xỉ giả sử đã biết n giá trị thực nghiệm yi (i=1,2,…n) của hàm y=f(x) tại các điểm tương ứng xi. Khi đó việc tìm một đa thức suy rộng có dạng (3-1) mà xấp xỉ hàm f(x) nói trên {x1;x2…;xn} ⊂[a;b] sẽ chuyển về tìm m+1 hệ số ai trong (3-1).

Để quá trình tính toán được đơn giản ta xét đa thức suy rộng m(x) với cấp m không lớn lắm. Tuy nhiên ta vẫn chọn n đủ lớn do đó có thể giả thiết n ≥m +1. Khác với bài toán nội suy ở đây ta không cần xác định m+1 giá trị ai từ n phườn trình: yi­ =m(xi),(i=) ( vì phương trình thường nhiều hơn số ẩn)

Ta sẽ áp dụng phương pháp bình phương tối thiểu để tìm đa thức suy rộng xấp xỉ tốt nhất với hàm f(x) trên [a;b].

Ta coi = =m(x)=

Từ đó suy ra: ( là điểm cực tiểu của hàm m+1 biến

F( = (3 – 2) Do đó là nghiệm của hệ phương trình

;;;…… ; .

Hoặc dưới dạng tuơng đương với nó

(3-3)

Gọi φr là vecto n chiều với thành phần thứ i là φr(xi).

Gọi y là vecto n chiều với thành phần thứ I là yi

Theo định nghĩa tích vô hướng các vecto ta có

[φr, φs]= (); [y, = () (3-4)

Do đó (3-3) chuyển về dạng:

(3-5)

Ta nhận thấy (3-5) là hệ (m+1) phương trình đại số tuyển tính dùng để xác định m+1 hệ số ( trong đa thức xấp xỉ (x). Ma trận của hệ phương trình tuyến tính (3-5) có các phần tử là [φi;φj], do đó là một ma trận đối xứng( dực vào tính chất giao hoàn của tích vô hướng). Ta sẽ gọi hệ phương trình (3-5) là hệ phương trình chuẩn.

Định thức của hệ phương trình có dạng

G(, = (3-6)

Ta gọi định thức G(, ) là định thức Gram của hệ vecto , , trên tập điểm X={ x1;x2…;xn}.

Mà ta đã biết: Nếu hàm cơ sở , (x) là hệ hàm độc lập tuyến tính trên X={ x1;x2; …; xn} ⊂[a,b] thì trong số những đa thức độc suy rộng cấp m có dạng (3-1) luôn tồn tại một đa thức suy rộng.

. (3-7)

Là xấp xỉ tốt nhất theo nghĩa trung bình phương đối với hàm f(x).

Ngoài ra còn có thể chứng minh khi hệ cơ sở

, (x) là những độc lập tuyến tín trên { x1;x2;…; xn} ⊂[a;b] thì G = (, ) >0. Nghĩa là trong trường hợp này hệ phương trình chuẩn (3-5) có và duy nhất nghiệm ứng với các hệ số của đa thức (3-7) xấp xỉ tốt nhất với hàm f(x) (theo nghĩa trung bình phương).

Do vậy ta có thể cho rằng hệ hàm cơ sở nghĩa là hệ hàm độc lập tuyến tính trên đoạn [a;b]

**3.3 Sai số của phương pháp:**

Cùng với việc tìm hàm xấp xỉ cho hàm f(x) ta cần đánh giá sai số hoặc độ lệch của nó đối với hàm f(x). Sai số ở đây hiểu theo nghĩa trung bình phương. Cụ thể là ta đi tìm đại lượng

= (3-8)

Từ (3-7) ta có

=

=[y-, y-] =[ y-,y]-[ y-, (3-9)

Mặt khác:

[ y-,=

= (3-10)

Kết hợp (3-10) với (3-5) ta có:

- =0

Thay kết quả trên vào (3-9) ta có:

= [y-

= [y,y]- (3-11)

Thay (3-11) vào (3-7) ta có

. (3-12)

Trong đó là nghiệm của hệ phương trình chuẩn (3-5).

**3.4. Mở rộng trên hệ trực giao.**

**3.4.1. Định nghĩa:**

Để đơn giản hóa kết quả trên thì ta định nghĩa về hệ hàm trực giao như sau:

Hệ hàm gọi là hệ trức giao trên tập X=(x1;x2; …; xn) nếu:

(3-13)

Số |||| mà = =gọi là chuẩn của hàm (x) trên tập hợp X.

Trong trường hợp hệ hàm ,,…, trực giao mà ||||=1 (r=0,1,2,…,m) thì hệ hàm được gọi là hệ trực chuẩn trên tập hợp X.

**3.4.2. Tiếp cận lời giải:**

Từ một hệ cơ sở bất kì ,,…,bao giờ cũng lập được một hệ trực chuẩn tương ứng ,,…, sao cho mỗi hệ hàm của hệ trực chuẩn là một tổ hợp tuyến tính của các hàm cơ sở đã cho:

= (r=0,1,2…,m) (3-14)  
 Từ (3-5) và (3-12) ta nhận thấy rằng: Nếu ,,…,là hệ trực giao thì đa thức xấp xỉ tốt nhất (3-7) của f(x) có các hệ số j cho bởi công thức

= [y, (i=0,1,2,..m)

Hay = (i=0,1,2,…,m) (3-15)

Từ đó ta có:

]=

**3.4.3. Sai số của phương pháp:**

Dựa trên (3-12) ta suy ra sai số trung bình phương của đa thức xấp xỉ là

(3-16)

Vì ≥0 nên tổng: là một đại lượng đơn điệu tăng theo m. Do đó (3-16) ta suy ra sai số trung bình phương sẽ giảm khi m tăng. Tóm lại nếu cấp m của đa thức xấp xỉ (3-7) ( với hệ cơ sở ,,…,là trực giao) càng lớn thì đa thức xấp xỉ f(x) càng tốt.

**3.4.4. Chú ý:**

**Một đặc điểm chú ý ở đây là:** Trong trường hợp chung khi cần thay đổi cấp m của đa thức xấp xỉ (3-7) thì hệ phương trình chuẩn (3-5) dùng để xác định các hệ số …….. của đa thức hoàn toàn thay đổi. Do đó quá trình tính toán ( giải hệ phương trình chuẩn) cần làm lại từ đầu. Tuy nhiên khi hệ hàm cơ sở là trực giao thì muốn thay đổi cấp m của đa thức xấp xỉ (3-7) (chẳng hạn tăng từ m lên m+1) ta chỉ cần thêm số từ công thức (3-14). Còn các hệ số đã thu được cho đa thức vẫn dùng được cho đa thức:

.

Nhận xét trên rất bổ ích về mặt thực hành tính toán vì khi muốn xấp xỉ một hàm thực nghiệm bằng một đa thức suy rộng cấp m (3-7): do khuôn khổ của sự tính toán ta không cần chọn ngay số m đủ lớn. Khi đó nếu hệ hàm cơ sở ,,…, là một hệ trực giao thì khi xuất phát ta có thể chọn số m nhỏ ( chẳng hạn m=1 hoặc 2). Sau khi thực hành tính toán nếu thấy sai số trung bình phương tương ứng chưa đủ bé ( so với yêu cầu) thì ta có thể tăng dần số m lên và tính thêm các hệ số bổ sung ( từ công thức (3-15)).

**4 Sơ đồ khối và thuật toán**

**4.1 Sơ đồ khối**

Bắt đầu

Nhập Input

Sai

Check input

Đúng

gán các giá trị φi i= với dạng hàm phù hợp

Trả về ma trận sau khi thay các x vào hàm số φ

Nhân ma trận nghịch đảo với ma trận θ

Dùng viền quanh để tính nghịch đảo của M

Tính giá trị của ma trận hệ số

Xuất ra ma trận hệ số và đồ thị hàm số

Kết Thúc

**4.2 Thuật toán chi tiết**

**4.2.1:Gói nhập và kiểm tra input**

Ảnh có chứa văn bản

Mô tả được tạo tự động

**4.2.2. Gói định dạng hàm**

Ảnh có chứa văn bản

Mô tả được tạo tự động

**4.2.3. Gói trả về ma trận sau khi thay các x vào hàm**

Ảnh có chứa văn bản

Mô tả được tạo tự động

**4.4. Gói dùng viền quanh để tính nghịch đảo của M.**

Ảnh có chứa văn bản

Mô tả được tạo tự động

**4.5 Gói tính giá trị ma trận hệ số và nhập dạng phương trình mong muốn.**

Ảnh có chứa văn bản

Mô tả được tạo tự động

**4.6 Gói xử lý kết quả và in kết quả ra màn hình**

Ảnh có chứa văn bản

Mô tả được tạo tự động

**5. Ví dụ**

**5.1 Ví dụ 1**

* Cho hàm số dưới dạng bảng số

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | 1,1 | 2,1 | 3,2 | 4,4 | 5,2 |
| y | 8,3 | 11,3 | 14,6 | 18,2 | 20,6 |

Cho biết sự phụ thuộc giữa 2 đại lượng x và y có dạng y= a+ bx. Xác định a,b?

**Giải:**

B1: Lập tổng bình phương sai số

S=yi-a-bxi)2

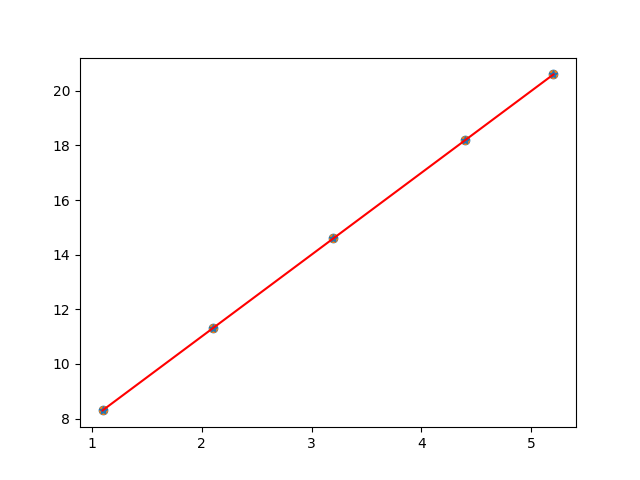
B2: a,b xác định từ hệ phương trình

🡪

🡪 🡪

🡪 y= 5+3x

**Kết quả khi chạy chương trình**

Ảnh có chứa văn bản, bảng đen

Mô tả được tạo tự động

Qua đó ta thấy phương trình cần tìm là y=5+3x trùng với cách xử lý bài toán theo cách giải thông thường

**5.2 Ví dụ 2**: Dùng phương pháp bptt xây dựng hàm thực nghiệm dạng y=bx+cx2 ứng với bảng số

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | -1.88 | -0.61 | 0.66 | 1.93 | 4.47 |
| y | 4.072832 | -1,219512 | 3,068768 | 23,937672 | 93,471352 |

**Giải**

Ta có

B1: Lập tổng bình phương sai số S= 2 🡪 min S

B2 Ta xác định b; c từ hệ phương trình

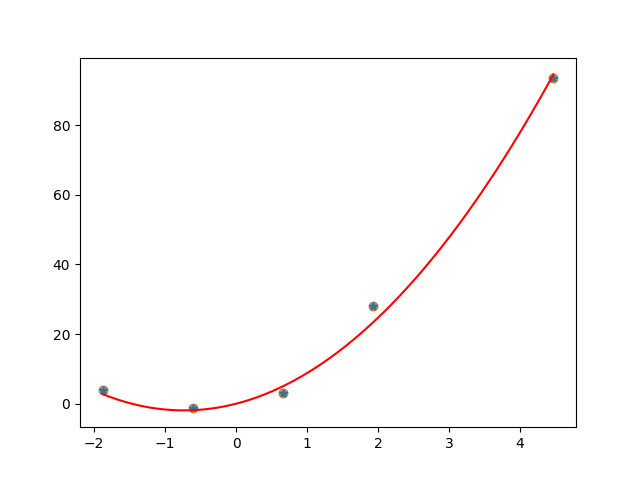
* 🡪 🡪

🡪 y= x + x2

**Chạy chương trình**

Ảnh có chứa văn bản

Mô tả được tạo tự động



Từ đó ta xác định được phương trình cần tìm y= x + x2

**5.3 Ví dụ 3**

* : Dùng phương pháp bptt xây dựng hàm thực nghiệm dạng y=a+bsin(x)+c.cos(x) ứng với bảng số

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x** | **0.15708** | **0.62932** | **3.14159** | **6.28319** | **8.37758** | **11.51917** | **12.56634** |
| y | 16.26885 | 22.32032 | 13.08002 | 17.52341 | 21.92821 | 9.07178 | 16.21345 |

**Giải**

B1: Lập tổng bình phương sai số S= 2🡪 min S

B2 Ta xác định b; c từ hệ phương trình

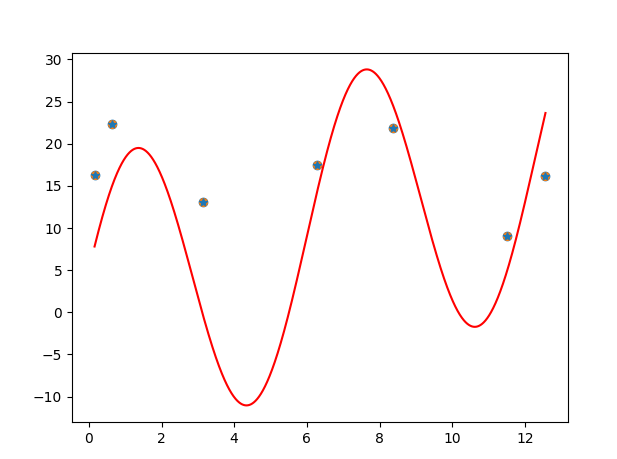
🡪

🡪y= 1.48329+ 16.80834sin(x) + 5.00854 cos(x)

**Chạy chương trình:**

Ảnh có chứa văn bản

Mô tả được tạo tự động



Ta cũng tìm được phương trình là:

y= 1.48329+ 16.80834sin(x) + 5.00854 cos(x)

**6 Đánh giá và ứng dụng**

**6.1 Đánh giá ưu nhược điểm**

**Ưu điểm:**

* + - Tính đơn giản: Nó rất dễ giải thích và dễ hiểu
    - Khả năng áp dụng: Hầu như không có bất kì ứng dụng nào bình phương tối thiểu không có ý nghĩa

**Nhược điểm:**

* + - thống kê kiểm tra có thể không đáng tin cậy khi dữ liệu không được phân phối bình thường
    - Xu hướng sử dụng quá nhiều dữ liệu.

**6.2 Ứng dụng**

Trong các vấn đề xảy ra trong khoa học tự nhiên hoặc xã hội, thật thuận tiện để biết các mối quan hệ xảy ra giữa các biến khác nhau bằng một số biểu thức toán học.

Ví dụ: chúng ta có thể liên quan đến chi phí (C), thu nhập (I) và lợi nhuận (U) trong kinh tế bằng một công thức đơn giản:

U=I-C

Trong vật lý, chúng ta có thể liên quan đến gia tốc gây ra bởi trọng lực, thời gian một vật thể rơi xuống và chiều cao của vật thể theo luật:

Trong biểu thức trước so là chiều cao ban đầu của vật thể đó và vo là tốc độ ban đầu của bạn.

Tuy nhiên, tìm công thức như thế này không phải là một nhiệm vụ đơn giản; thông thường, tùy thuộc vào chuyên môn khi làm với nhiều dữ liệu và liên tục thực hiện một số thử nghiệm (để xác minh rằng kết quả thu được là không đổi) để tìm mối quan hệ giữa các dữ liệu khác nhau.

Một cách phổ biến để đạt được điều này là biểu diễn dữ liệu thu được trong một mặt phẳng dưới dạng các điểm và tìm kiếm một hàm liên tục tiếp cận tối ưu các điểm này.

Một trong những cách để tìm hàm "gần đúng nhất" dữ liệu đã cho là bằng phương pháp bình phương nhỏ nhất.

Ngoài ra, như chúng ta đã thấy trong bài tập, nhờ phương pháp này, chúng ta có thể có được xấp xỉ khá gần với hằng số vật lý.

**7. Lời kết**

Phương pháp bình phương tối thiểu lập công thức từ thực nghiệm là một trong những bài toán hay và có tính ứng dụng rất lớn vì nó khá cơ bản trong thực tế. Vì thông qua phương pháp này ta có thể gần như tìm chính xác hàm trong thực tế.

Thông qua chương trình cụ thể viết trên ngôn ngữ lập trình python thì ta có thể  
thấy phần nào tính ưu việt của phương pháp này. Tuy nhiên do sự hạn chế về  
thời gian và kinh nghiệm nên phần báo cáo cũng như không tránh khỏi thiếu sót. Do đó em cũng rất mong cô và các bạn thông cảm và bỏ qua cho em. Và em cũng cảm ơn tới cô và các thành viên trong lớp vì đã cho em sự góp ý tốt nhất để hoàn thành bài báo cáo này!

Em xin chân thành cảm ơn!

8. Tài liệu tham khảo

1. Lê Trọng Vinh- Giáo trình giải tích số- Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật-2007

2 <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Linear_least_squares>

3 <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Total_least_squares>

4 <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Regularized_least_squares>

**9: phụ lục các bản input**

**9.1 Input 1**

1.1 8.3

2.1 11.3

3.2 14.6

4.4 18.2

5.2 20.6

**9.2. Input 2**

-1.88 4.072832

-0.61 -1.219512

0.66 3.068768

1.93 23.937672

4.47 93.471352

**9.3 input 3**

0.15708 16.26885

0.62932 22.32032

3.14159 13.08002

6.28319 17.52341

8.37758 21.92821

11.51917 9.07178

12.56634 16.21345